

ВОЛИНСЬКЕ ВІДДІЛЕННЯ МАН УКРАЇНИ

Геометричні підходи для оцінювання ймовірнісних характеристик функцій від випадкових величин



Роботу виконав: Ногачевський-Ярмоліч Данило Володимирович, учень 10-го класу закладу загальної середньої освіти "Камінь-Каширський ліцей" №2 Камінь-Каширської міської ради Волинської області.

Науковий керівник: Лагода Володимир Андрійович, учитель математики закладу загальної середньої освіти

"Камінь-Каширський ліцей" №2 Камінь-Каширської міської ради Волинської області, кандидат фізико-математичних наук.

Мета роботи полягає у дослідженні можливостей використання геометричних підходів для аналізу ймовірнісних характеристик моделей та виявленні умов, за яких такі підходи дозволяють уникнути громіздких аналітичних обчислень.

Для досягнення цієї мети в роботі розв'язано такі **завдання**:

- проаналізовано геометричне означення ймовірності та область його використання;
- розглянуто приклади застосування геометричних методів ;
- побудовано математичну модель прикладної задачі вибору;
- досліджено залежність математичного сподівання функції від параметра, що характеризує якість прийняття рішення

Об'єктом дослідження є ймовірнісні моделі, описані функціями від випадкових величин, а **предметом дослідження** — геометричні способи оцінювання їхніх числових характеристик, зокрема математичного сподівання.

В ході дослідження спочатку було розглянуто випадки допоміжних лінійних функцій від випадкових величин

$$\xi_1(Z_1; Z_2) = Z_1 - Z_2 \text{ та } \xi_2(Z_1; Z_2) = (Z_1 + Z_2) / 2,$$

де випадкові величини Z_1 та Z_2 рівномірно випадково розподілені на відрізках $[1; 2]$ та $[0; 1]$ відповідно.

За допомогою геометричного означення ймовірностей (Рис.1 та Рис.2), в залежності від типу фігури, виведено формулу для функцій розподілу ξ_1 :

$$F_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{2}x^2, & 0 < x \leq 1, \\ 1 - \frac{(2-x)^2}{2}, & 1 < x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases} \quad (1)$$

Аналогічно, в залежності від типу фігури (Рис.3 та Рис. 4) виписано формулу для функцій розподілу ξ_2 :

$$F_{\xi_2}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0.5, \\ \frac{(2x-1)^2}{2}, & 0.5 < x \leq 1, \\ 1 - \frac{(3-2x)^2}{2}, & 1 < x < 1.5, \\ 1, & x \geq 1.5. \end{cases} \quad (2)$$

Побудовано прикладну модель для авторської задачі вибору між справжнім та підробленим **iPhone** (Рис.5). Початковий стан перед вибором задає випадковий вектор $Z = (Z_1; Z_2)$, де Z_1 — стан вживаного **iPhone** (справжнього), а Z_2 — стан підробки. Z_1 рівномірно випадково розподілена на відрізку $[1; 2]$, причому $Z_1 = 2$ означає, що вживаний **iPhone** в ідеальному стані, а $Z_1 = 1$ — що **iPhone** в поганому стані. Аналогічно, Z_2 рівномірно випадково розподілена на відрізку $[0; 1]$, причому $Z_2 = 1$ означає, що підробка функціонально добра, а $Z_2 = 0$ — що підробка зіпсована. Результат вибору описується функцією:

$$\eta(Z_1, Z_2, \varepsilon) = \begin{cases} Z_1, & Z_1 - Z_2 > \varepsilon, \\ \frac{Z_1 + Z_2}{2}, & Z_1 - Z_2 \leq \varepsilon. \end{cases} \quad (3)$$

Тут параметр ε — коефіцієнт короткозорості, який характеризує здатність людини відрізнити якість товару. Чим більше ε , тим гірше людина розрізняє справжній і підроблений телефон. Визначення (3) означає, що якщо людина якісно добре розрізняє якість **iPhone** ($Z_1 - Z_2 > \varepsilon$), то вона ніколи не обере підробку. В протилежному випадку ($Z_1 - Z_2 \leq \varepsilon$) шанси обрати справжній і підроблений телефон усереднюються. Використовуючи геометричні підходи, операцію інтегрування та допоміжні результати (1) та (2) отримано наступні формули для математичного сподівання функції η залежно від параметра ε :

$$(I) \ \varepsilon \in (0; 1): \ M\eta(\varepsilon) = \frac{3}{2} - \frac{\varepsilon^3}{6}; \quad (II) \ \varepsilon \in [1; 2): \ M\eta(\varepsilon) = \frac{5}{3} - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{6}; \quad (III) \ \varepsilon \geq 2: \ M\eta = 1.$$

Випадки (I) та (II) демонструють, що чим менше $\varepsilon \in (0, 2]$, тим більше $M\eta(\varepsilon)$ і це передбачувано з практичної сторони задачі, оскільки чим краще характеристика людини визначати стан **iPhone** (тобто ε ближче до 0), тим кращий вибір роблять такі особи.

При $\varepsilon \geq 2$ випадок (III) свідчить, що математичне сподівання $M\eta$ є сталою величиною і не залежить від параметра ε . Унаслідок цього особа, що приймає рішення, повністю втрачає здатність розрізняти якість оригінального пристрою та підробки.

ВИСНОВКИ



Рис.5

Достовірність отриманих результатів забезпечується використанням загальновідомих положень теорії ймовірностей, геометричного означення ймовірності та коректних обчислень. Запропонований підхід має теоретичне значення для подальшого дослідження ймовірнісних моделей та прикладну цінність для аналізу задач вибору і прийняття рішень в умовах невизначеності.

Отримані результати можуть бути використані у навчальному процесі, а також як основа для побудови більш складних моделей, у яких стан об'єкта описується випадковим вектором і додатковими параметрами.